Метод дробных шагов для трехмерного уравнения параболического типа

Уравнения теплопроводности является параболическим типом в частных производных. В декартовой системе координат трехмерное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (1)$$

Для полноты задачи нужно будет поставить начальные и граничные условия (в отличие от двумерного уравнения здесь будет существовать дополнительные два условия, что в итоге дает нам шесть граничных условий), к примеру

$$u\big|_{t=0} = 0 \quad u\big|_{x=0} = 1 \quad u\big|_{x=1} = 0 \quad u\big|_{y=0} = 0 \quad u\big|_{y=1} = 0 \quad u\big|_{z=0} = 0 \quad u\big|_{z=1} = 0$$

При применении обычных методов к решению трехмерного уравнения теплопроводности с условно устойчивым алгоритмом возникают много проблем с подбором параметров для того чтобы выполнялись условия устойчивости, привели к созданию неявных схем стабилизирующих поправок Дугласа (Метод дробных шагов). Применяя схему стабилизирующих поправок, получим трехшаговую разностную схему:

Шаг 1

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1/3} - u_{ijk}^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_1 u^n) + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n$$

Шаг 2

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+2/3} - u_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_2 u^{n+2/3} - \Lambda_2 u^n)$$

Шаг 3

$$\frac{u_{i\,jk}^{n+1} - u_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\Lambda_3 u^{n+1} - \Lambda_3 u^n)$$

где операторы имеют вид

$$\Lambda_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_3 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Расписав первый шаг, получим

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+1/3} - u_{ijk}^{\;\;n}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1jk}^{n+1/2} - 2u_{ijk}^{n+1/2} + u_{i-1jk}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1jk}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{i-1jk}^{n}}{\Delta x^2}\right) + \quad (2)$$

$$+ \frac{u_{ij+1k}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n} - 2u_{ij}^{n} + u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2}$$

Второй шаг:

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+2/3} - u_{ijk}^{\;\;n+1/3}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{ij+1k}^{n+2/3} - 2u_{ijk}^{n+2/3} + u_{ij-1k}^{n+2/3}}{\Delta y^2} - \frac{u_{ij+1k}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2}\right) \quad (3)$$

А третий шаг можно расписать в таком виде

$$\frac{u_{i\,jk}^{\;n+1} - u_{ijk}^{\;\;n+2/3}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{ijk+1}^{n+1} - 2u_{ijk}^{n+1} + u_{ijk-1}^{n+1}}{\Delta z^2} - \frac{u_{ijk+1}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2}\right) \quad (4)$$

В результате проведенного «расщепления» задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. На шаге 1 такая система решается для каждой i (ряда точек с фиксированным j и k), а на шаге 2 — для каждого j (ряда точек с фиксированным i и k), а на шаге 3 для каждого k (ряда точек с фиксированным i и j). Неявный метод стабилизирующих поправок обладает вторым порядком точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta x)^2, (\Delta t)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$.

Для первого шага получающейся систему алгебраических уравнений решим методом прогонки. Приведем систему алгебраических уравнений (2) к такому виду:

$$A_i u_{i+1} + B_i u_i + C_i u_{i-1} = D_i, i = 1, N-1 \quad (5)$$

И здесь

$$A_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$

$$D_i = \frac{u_i^{\;n}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{u_{i+1jk}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{i-1jk}^{n}}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{u_{ij+1k}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ij-1k}^{n}}{\Delta y^2} + \frac{u_{ijk+1}^{n} - 2u_{ijk}^{n} + u_{ijk-1}^{n}}{\Delta z^2}$$

Для второго шага мы получим иные значения

$$A_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$
$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$
$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$
$$D_i = \frac{u_i^{\ n}}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_{ij+1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij-1k}^n}{\Delta y^2}$$

Для третьего шага значения будут иметь вид

$$A_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$
$$B_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^2}$$
$$C_i = -\frac{1}{2\Delta x^2}$$
$$D_i = \frac{u_i^{\ n}}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{u_{ijk+1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk-1}^n}{\Delta z^2}$$

Метод дробных шагов является абсолютно устойчивой схемой.